សមាគមគណិតវិទ្យាកម្ពុជា
Mathematical Association of Cambodia

ទំនាក់ទំនងសមមូល និងក្រុមផលចែក

អត្ថបទពង្រីកចំណេះដឹង

ពីជគណិតវិទ្យាទំនើប

សិក្សា និងរៀបរៀងដោយសមាជិក **M.A.C.** ជំនាន់ទី 1

June 27, 2024

វត្ថុបំណង

ក្នុងអត្ថបទនេះ យើងនឹងបង្ហាញឱ្យឃើញពីភាពត្រូវគ្នារវាងទំនាក់ទំនងសមមូល និងសំណុំ Cosets។ លើសពីនេះ យើងនឹងបង្ហាញពីលក្ខខណ្ឌមួយចំនួនដើម្បីឱ្យសំណុំ Cosets មានទម្រង់ជាក្រុម។ ចុងក្រោយ យើងនឹងបង្ហាញពីការអនុវត្តន៍ខ្លះៗនៃក្រុមផលចែក។

1 ទំនាក់ទំនងសមមូល

និយមន័យ 1.1 (ទំនាក់ទំនងសមមូល)

នៅលើសំណុំមិនទទេ S មួយ យើងកំណត់នូវទំនាក់ទំនង $\sim$ ដែលវាផ្ទៀងផ្ទាត់៖

- លក្ខណៈខ្លួនឯង (Reflexivity)៖ $\forall a \in S, \quad a \sim a$ ។
- លក្ខណៈឆ្លុះ (Symmetry)៖ $\forall a, b \in S, \quad a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$ ។
- លក្ខណៈឆ្លង (Transitivity)៖ $\forall a, b, c \in S, \quad a \sim b, \quad b \sim c \Longrightarrow a \sim c$ ។

ទំនាក់ទំនង $\sim$ ហៅថា **ទំនាក់ទំនងសមមូល** (Equivalent Relation) លើសំណុំ S ។

ឧទាហរណ៍ 1.1. នៅក្នុងសំណុំចំនួនគត់ $\mathbb{Z}$ គេឱ្យ $n \in \mathbb{Z}$ យើងកំណត់ទំនាក់ទំនង $\sim$ លើសំណុំ $\mathbb{Z}$ ដូចខាងក្រោម ៖

$$\forall a, b \in \mathbb{Z},\, a \sim b \Longleftrightarrow n|b-a$$

- លក្ខណៈខ្លួនឯង៖ $\forall a \in \mathbb{Z}, \quad a - a = 0 \Longrightarrow n|0$ ឬ $n|a-a$ យើងបាន $a \sim a$ ។
- លក្ខណៈឆ្លុះ៖ $\forall a, b \in \mathbb{Z},$ បើ $a \sim b$ នោះ $n|b-a$ នាំឱ្យ $n|a-b$ យើងបាន $b \sim a$ ។
- លក្ខណៈឆ្លង៖ $\forall a, b, c \in \mathbb{Z},$ បើ $a \sim b, \quad b \sim c$ នោះ $n|b-a$ និង $n|c-b$ រៀងគ្នា ។
  យើងអាចសរសេរ $b - a = k_1 n$ និង $c - b = k_2 n$ ដែល $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$
  យើងបាន
  $$\begin{aligned} c - a &= (c-b) + (b-a) \\ &= k_2 n + k_1 n \\ &= (k_2 + k_1)n, \quad \text{ដែល } k_2 + k_1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$
  នាំឱ្យ
  $$n|c-a \text{ នោះ } a \sim c$$
  ដូចនេះ $\sim$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើសំណុំចំនួនគត់ $\mathbb{Z}$ ។

2 ថ្នាក់សមមូល

និយមន័យ 2.1

- គេឱ្យ $\sim$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើសំណុំមិនទទេ S។ **ថ្នាក់សមមូល** នៃធាតុ $a \in S$ តាងដោយ $[a]$ ឬ $\overline{a}$ ឬ $\dot{a}$ ជាសំណុំនៃធាតុរបស់ S ទាំងអស់ដែលមានទំនាក់ទំនងទៅនឹង a។ គេបាន
$$[a] = \{b \in S | a \sim b\} \text{ ។}$$
- សំណុំនៃថ្នាក់សមមូលទាំងអស់នៃសំណុំ S តាងដោយ ${}^{S}\!/\!_{\sim} := \{[a] | a \in S\}$ ហៅថា **សំណុំផលចែក** នៃ S ដោយ $\sim$ ។

ឧទាហរណ៍ 2.1. បន្តពីឧទាហរណ៍ 1.1 ដោយយក $n = 5$ នោះទំនាក់ទំនងសមមូល $\sim$ លើសំណុំ $\mathbb{Z}$ កំណត់ដោយ៖
$$a \sim b \Longleftrightarrow 5 | b - a, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$$
គេបាន
$$\begin{aligned}
[0] &= \{m \in \mathbb{Z} | m \sim 0\} \\
&= \{m \in \mathbb{Z} | \quad 5 | m - 0\} \\
&= \{m \in \mathbb{Z} | m = 5k, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{5k | k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{..., -10, -5, 0, 5, 10, ...\} \\
[1] &= \{m \in \mathbb{Z} | m \sim 1\} \\
&= \{m \in \mathbb{Z} | \quad 5 | m - 1\} \\
&= \{m \in \mathbb{Z} | m = 5k + 1, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{5k + 1 | k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{..., -9, -4, 1, 6, 11, ...\} \\
[2] &= \{5k + 2 | k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{..., -8, -3, 2, 7, 12, ...\} \\
[3] &= \{5k + 3 | k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{..., -7, -2, 3, 8, 13, ...\} \\
[4] &= \{5k + 4 | k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{..., -6, -1, 4, 9, 14, ...\} \\
[5] &= \{5k + 5 | k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{5k | k \in \mathbb{Z}\} = [0]
\end{aligned}$$
ដូចគ្នាដែរ $[6] = [1], [7] = [2], ...$
ម្យ៉ាងទៀត $[-1] = [4], [-2] = [3], [-3] = [2], [-4] = [1], [-5] = [0], [-6] = [4], ...$
ដូចនេះ
$$^{\mathbb{Z}}\!/\!_{\sim} = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

សម្គាល់ 2.1. តាមរយៈឧទាហរណ៍ខាងលើ យើងសង្កេតឃើញថា $\mathbb{Z}/\sim = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ ។
ម្យ៉ាងវិញទៀត $\mathbb{Z} = [0] \sqcup [1] \sqcup [2] \sqcup [3] \sqcup [4]$ ($\sqcup$ មានន័យថា ប្រជុំដាច់គ្នាពីរៗ) ។
ដូចនេះ ថ្នាក់នីមួយៗនៃ $\mathbb{Z}/\sim$ គឺជាបំណែកនៃសំណុំ $\mathbb{Z}$ ។

ជាទូទៅ៖ សំណុំផលចែក $S/\sim$ គឺជាបំណែកនៃសំណុំ S ដោយទំនាក់ទំនង $\sim$ ។

សំណើរ 2.1

ប្រសិនបើ $\sim$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើសំណុំ S នោះ

1. $\forall a \in S$ នាំឱ្យ $a \in [a]$ ។
2. $a \sim b \Longleftrightarrow a \in [b] \Longleftrightarrow [a] = [b]$ ។
3. $\forall a, b \in S$ នាំឱ្យ $[a] \cap [b] = \varnothing$ ឬ $[a] = [b]$ ដែលនាំឱ្យ $S/\sim$ គឺជាបំណែកនៃសំណុំ S ។

សម្រាយបញ្ជាក់. ឧបមាថា $\sim$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើសំណុំ S ។

1. $\forall a \in S$ នាំឱ្យ $a \in [a]$
   តាមនិយមន័យ
   $$[a] = \{x \in S | a \sim x\}$$
   តាមលក្ខណៈខ្លួនឯង
   $$\forall a \in S,\ a \sim a$$
   ដូចនេះ
   $$a \in [a] \text{ ។}$$

2. $a \sim b \Longleftrightarrow a \in [b] \Longleftrightarrow [a] = [b]$
   ចំពោះ $\forall a, b \in S$
   គេមាន
   $$a \sim b \Longleftrightarrow a \in [b] \quad \text{តាមនិយមន័យនៃ} \quad [b]$$
   បើ $[a] = [b]$ គេបាន $a \in [b]$ ព្រោះ $a \in [a]$
   នាំឱ្យ
   $$a \sim b$$
   បើ $a \sim b$ នោះ
   $$\begin{aligned} x \in [a] &\Longleftrightarrow x \sim a \\ &\Longleftrightarrow x \sim b \quad \text{ព្រោះ } a \sim b \\ &\Longleftrightarrow x \in [b] \end{aligned}$$
   ដូចនេះ
   $$[a] = [b] \text{ ។}$$

3. $\forall a, b \in S$ នោះ $[a] \cap [b] = \varnothing$ ឬ $[a] = [b]$
   ឧបមាថា $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ យើងនឹងស្រាយថា $[a] = [b]$
   ដោយ $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ នោះមាន $x \in S$ ដែល $x \in [a] \cap [b]$ នាំឱ្យ $x \in [a]$ និង $b \in [b]$

គេបាន $\begin{cases} x \in [a] \Longrightarrow a \sim x \\ x \in [b] \Longrightarrow b \sim x \end{cases}$ តាមលក្ខណៈឆ្លង កំណត់បាន $a \sim b$
តាមសំណើរទី 2 គេបាន

$$[a] = [b]$$

ដូចនេះ

$$\forall\, a, b \in S \text{ នោះ } [a] \cap [b] = \varnothing \text{ ឬ } [a] = [b] \text{ ។}$$

■

3 ទំនាក់ទំនងរវាងសំណុំផលចែក និងសំណុំ Cosets

និយមន័យ 3.1

គេមាន G គឺជាក្រុម និង H ជាក្រុមរងនៃ G។

1. Cosets ខាងស្តាំនៃ H ក្នុង G កំណត់ដោយ $Ha = \{ha | h \in H\}, \quad \forall a \in G$។
2. Cosets ខាងឆ្វេងនៃ H ក្នុង G កំណត់ដោយ $aH = \{ah | h \in H\}, \quad \forall a \in G$។
   ម្យ៉ាងទៀត សំណុំ Cosets ខាងឆ្វេងនិង Cosets ខាងស្តាំកំណត់រៀងគ្នាដោយ៖

$$G/_H = \{aH | a \in G\} \quad \text{និង} \quad {}_H\backslash^G = \{Ha | a \in G\} \quad \text{។}$$

សម្គាល់ 3.1. បើ G ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីបូក យើងតាង Cosets ខាងស្តាំនិងខាងឆ្វេងរៀងគ្នាដោយ $H + a$ និង $a + H$ ។ គេបាន

$$G/_H = \{a + H | a \in G\} \quad \text{និង} \quad {}_H\backslash^G = \{H + a | a \in G\} \quad \text{។}$$

សំណើរ 3.1

គេមាន G ជាក្រុមនិង H ជាក្រុមរងនៃ G។ នៅលើ G យើងបង្កើតទំនាក់ទំនងដូចខាងក្រោម

$$\forall\, a, b \in G,\, a \sim_H b \Longleftrightarrow a^{-1}b \in H$$

គេបានទំនាក់ទំនង $\sim_H$ ខាងលើជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើក្រុម G ហើយថ្នាក់សមមូលចំពោះគ្រប់ធាតុ $a \in G$ គឺ $[a] = aH$ គឺជា Cosets ខាងឆ្វេងនៃ H ។

សម្រាយបញ្ជាក់. យើងនឹងស្រាយថា $a \sim_H b \Longleftrightarrow a^{-1}b \in H$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូល

- លក្ខណៈឆ្លុះ៖ $\forall\, a \in G, \quad a^{-1}a = e \in H$ យើងបាន $a \sim_H a$
- លក្ខណៈឆ្លុះ៖ $\forall\, a, b \in G$, បើ $a \sim_H b \Longleftrightarrow a^{-1}b \in H$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow (a^{-1}b)^{-1} \in H \quad \text{ព្រោះ } H \leq G \\ &\Longleftrightarrow b^{-1}a \in H \\ &\Longleftrightarrow b \sim_H a \end{aligned}$$

- លក្ខណៈឆ្លុះ៖ $\forall a,b,c\in G$, បើ $a\sim_H b$, $b\sim_H c$ នោះ $a^{-1}b\in H$ និង $b^{-1}c\in H$ រៀងគ្នា ។ យើងបាន
$$(a^{-1}b)(b^{-1}c)\in H \Longleftrightarrow a^{-1}c\in H \Longleftrightarrow a\sim_H c$$
ដូចនេះ $a\sim_H b \Longleftrightarrow a^{-1}b\in H$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូល ។
ចំពោះគ្រប់ $a\in G$ គេបាន
$$\begin{aligned}[a] &= \{b\in G|a\sim_H b\}\\ &= \{b\in G|a^{-1}b\in H\}\\ &= \{b\in G|a^{-1}b=h, h\in H\}\\ &= \{b\in G|b=ah, h\in H\}\\ &= \{ah|h\in H\}\\ &= aH\end{aligned}$$
មានន័យថា ធាតុក្នុងសំណុំផលចែក $G/\sim$ ស្មើនឹងធាតុនៃសំណុំ Cosets ខាងឆ្វេង។

សម្គាល់ 3.2. គេអាចកំណត់ទំនាក់ទំនង ${}_H\sim$ លើក្រុម G ដោយ
$$\forall a,b\in G,\ a\ {}_H\sim b \Longleftrightarrow ba^{-1}\in H$$
ដូចគ្នាដែរ ទំនាក់ទំនង ${}_H\sim$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើក្រុម G ហើយថ្នាក់សមមូលចំពោះគ្រប់ $a\in G$ គឺ $[a]=Ha$ ជាធាតុនៃសំណុំ Cosets ខាងស្តាំ។

សម្គាល់ 3.3. បើ G ជាក្រុមកំណត់ដោយប្រមាណវិធីបូក នោះទំនាក់ទំនង $\sim_H$ និង ${}_H\sim$ អាចសរសេរទៅជា
$$\begin{aligned}\forall a,b\in G, a\sim_H b &\Longleftrightarrow -a+b\in H\\ a\ {}_H\sim b &\Longleftrightarrow b-a\in H\end{aligned}$$
ដូចនេះ $G/\sim_H = G/H$ និង $G/{}_H\sim = {}_H\backslash^G$ ជាសំណុំ Cosets ខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំរៀងគ្នា។ ■

ឧទាហរណ៍ 3.1. បន្តពីឧទាហរណ៍ 1.1 និង 2.1 ខាងលើ ចំពោះ $n=5$ គេមានទំនាក់ទំនងសមមូល
$$a\sim b \Longleftrightarrow 5|b-a,\quad \forall a,b\in\mathbb{Z}$$
អាចសរសេរទៅជា
$$a\sim_H b \Longleftrightarrow b-a\in H$$
ដែល H ជាក្រុមរងនៃ G ដែលត្រូវកំណត់។
សង្កេត
$$\begin{aligned}a\sim b &\Longleftrightarrow b-a=5k,\quad k\in\mathbb{Z}\\ &\Longleftrightarrow b-a\in 5\mathbb{Z}\end{aligned}$$
ដែល $5\mathbb{Z}=\{5n|n\in\mathbb{Z}\}$ ។
ធៀបនឹងទំនាក់ទំនងសមមូល $\sim_H$ យើងបាន $H=5\mathbb{Z}$ ។
ដោយ $\forall a,b\in H$ គេបាន $a=5k_1$, $b=5k_2$ ដែល $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$
នាំឱ្យ
$$a-b=5(k_1-k_2)\in 5\mathbb{Z}=H$$
គេបាន H ជាក្រុមរងនៃ $\mathbb{Z}$ ។
ដូចនេះ ចំពោះ $n=5$ គេបាន $\mathbb{Z}/\sim_H = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/H = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ ។
ជាទូទៅ៖ ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ គេបាន $\mathbb{Z}/\sim = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ដែល $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},...,\overline{n-1}\}$។

4 ក្រុមផលចែក (Quotient Groups)

គេមាន G ជាក្រុម និង H ជាក្រុមរងនៃក្រុម G គេបាន ${}^{G}/_{H} = \{aH|a \in G\}$ ជាសំណុំនៃថ្នាក់សមមូលដែលជា Cosets ខាងឆ្វេងទាំងអស់នៃក្រុម G ។
សំណួរដែលគួរឱ្យចាប់អារម្មណ៍មួយ គឺថា តើសំណុំ ${}^{G}/_{H}$ មានទម្រង់ជាក្រុមឬទេ ?
ដើម្បីឱ្យ ${}^{G}/_{H}$ មានទម្រង់ជាក្រុម យើងត្រូវបង្កើតប្រមាណវិធីនៅលើ ${}^{G}/_{H}$ ។
ជាដំបូងយើងបង្កើតប្រមាណវិធីគុណនៅលើ ${}^{G}/_{H}$ ដូចខាងក្រោម៖

$$(aH)(bH) := (ab)H$$

តើប្រមាណវិធីគុណដែលយើងបានបង្កើតខាងលើ ជាអនុគមន៍ដែរឬទេ ?

សម្គាល់ 4.1. អនុគមន៍គឺជាទំនាក់ទំនងរវាងសំណុំដើមទៅសំណុំចុង ដែលធាតុនីមួយៗនៅក្នុងសំណុំដើមផ្តល់រូបភាពតែមួយគត់នៅក្នុងសំណុំចុង។

ចម្លើយ គឺប្រមាណវិធីខាងលើមិនមែនជាអនុគមន៍ទេ តាមរយៈឧទាហរណ៍ផ្ទុញខាងក្រោម៖

ឧទាហរណ៍ 4.1. ពិនិត្យក្រុមចម្លាស់ $S_3 = \{\epsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ ដែល ϵ តាងឱ្យអនុគមន៍ខ្លួនឯង (ជាតុណឹត)។
ចំពោះ $H = \{\epsilon, (12)\}$ ដែលជាក្រុមរងនៃ S_3 យើងមាន

$$(13)H = \{(13), (123)\} = (123)H$$
$$(23)H = \{(23), (132)\} = (132)H$$

មានន័យថា

$$((13)H, (23)H) = ((123)H, (132)H)$$

នោះ

$$[(13)H][(23)H] = [(13)(23)]H = (132)H$$

តែ

$$[(123)H][(132)H] = \epsilon H = H$$

នេះមានន័យថាធាតុតែមួយ $((13)H, (23)H) = ((123)H, (132)H)$ ក្នុងសំណុំដើម ${}^{G}/_{H} \times {}^{G}/_{H}$ មានរូបភាពពីរផ្សេងគ្នាគឺ $(132)H$ និង H ក្នុងសំណុំចុង ដែលផ្ទុយពីនិយមន័យអនុគមន៍ក្នុងសម្គាល់ 4.1។

ថ្វីត្បិតតែប្រមាណវិធីខាងលើមិនមែនជាអនុគមន៍ ប៉ុន្តែវាផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈដែលធ្វើឱ្យ ${}^{G}/_{H}$ មានទម្រង់ជាក្រុម។ ជាក់ស្តែង៖

- លក្ខណៈផ្តុំ ៖
  គេមាន
  $$\begin{aligned}[(aH)(bH)](cH) &= [(ab)H](cH)\\ &= [(ab)c]H\\ &= [a(bc)]H \quad \text{ព្រោះ } G \text{ មានលក្ខណៈផ្តុំ}\\ &= (aH)[(bc)H]\\ &= (aH)[(bH)(cH)]\end{aligned}$$

- ធាតុណឺត៖
  គេមាន $eH = \{eh|h \in H\} = \{h|h \in H\} = H$ ជាធាតុណឺតនៃ G/H
  ព្រោះ
  $$(aH)(eH) = (ae)H = aH$$
  $$(eH)(aH) = (ea)H = aH$$

- ធាតុប្រាស៖ $\forall aH \in G/H, \quad \exists a^{-1}H \in G/H$
  ដែល
  $$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$$
  $$(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = H$$

យើងនឹងបង្ហាញថា G/H ជាក្រុមដោយបន្ថែមនូវលក្ខខណ្ឌមួយទៅឱ្យក្រុមរង H ដែលអាចធ្វើឱ្យប្រមាណវិធីលើ G/H ជាអនុគមន៍។

និយមន័យ 4.1 (ក្រុមរងណរម៉ាល់)

ក្រុមរង H នៃក្រុម G ជាក្រុមរងណរម៉ាល់លុះត្រាតែ $aH = Ha$ ចំពោះគ្រប់ធាតុ $a \in G$ ដែលគេកំណត់សរសេរដោយ $H \lhd G$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 4.1

គេមានក្រុម G និង $H \lhd G$។ គេបាន សំណុំផលចែក $G/H = \{aH|a \in G\}$ គឺជាក្រុមដែលប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី
$$(aH)(bH) = (ab)H, \quad \forall a, b \in G$$
ក្រុម G/H ហៅថា **ក្រុមផលចែក** (Factor Groups ឬ Quotient Groups) នៃ G ដោយ H ។

សម្គាល់ 4.2. ជាទូទៅបើ G ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីបូក យើងកំណត់ប្រមាណវិធីបូកនៅលើសំណុំផលចែកដូចខាងក្រោម៖
$$(a + H) + (b + H) = (a + b) + H$$

សម្រាយបញ្ជាក់. តាមការពិភាក្សាខាងលើ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថាប្រមាណវិធីលើ G/H ជាអនុគមន៍។
គេមាន
$$(aH, bH) \in G/H \times G/H$$
$$(cH, dH) \in G/H \times G/H$$
យើងត្រូវស្រាយថា
$$(aH, bH) = (cH, dH) \Longrightarrow (ab)H = (cd)H$$
ដោយ $(aH, bH) = (cH, dH)$ គេបាន $\begin{cases} aH = cH \\ bH = dH \end{cases}$

$$\text{នោះ } \begin{cases} a \in cH \\ b \in dH \end{cases}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} a = ch_1 \\ b = dh_2 \end{cases} \quad \text{ដែល } h_1, h_2 \in H$$

គេបាន

$$\begin{aligned}(ab)H &= (ch_1)(dh_2)H \\ &= c(h_1d)h_2H \\ &= c(dh_3)h_2H,\ \text{ដែល } h_3 \in H \text{ ព្រោះ } Hd = dH \text{ ដោយសារ } H \triangleleft G \\ &= (cd)H \quad \text{ព្រោះ} \quad h_3h_2H = H \text{ ដោយសារ } h_3h_2 \in H\end{aligned}$$

ដូចនេះ ប្រមាណវិធីលើ ${}^{G}\!/_{H}$ ជាអនុគមន៍ នាំឱ្យ ${}^{G}\!/_{H}$ ជាក្រុម ។ ■

5 ការអនុវត្តន៍នៃក្រុមផលចែក (Applications of Quotient Groups)

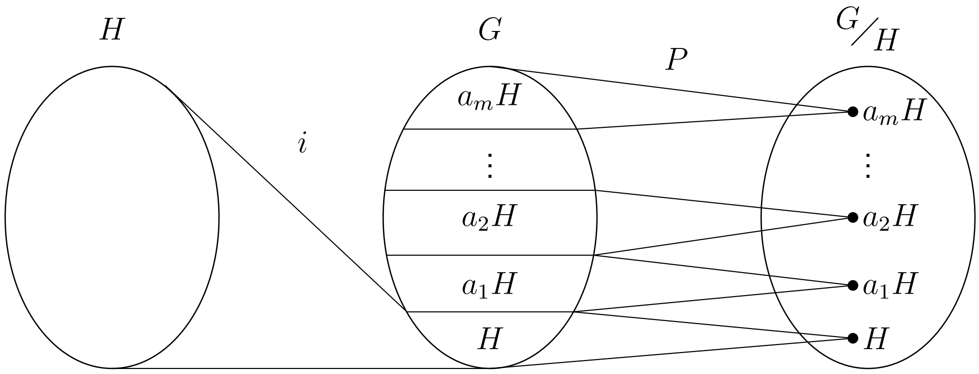
ហេតុអ្វីបានជាយើងត្រូវសិក្សាក្រុមផលចែក?
មុននឹងឆ្លើយនឹងសំណួរនេះ យើងពិនិត្យមើលអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned}P : G &\longrightarrow {}^{G}\!/_{H} \\ a &\mapsto aH\end{aligned}$$

P ជាអនុគមន៍ពេញ ព្រោះ $P(G) = \{P(a) | a \in G\} = \{aH | a \in G\} = {}^{G}\!/_{H}$ ។
ម្យ៉ាងទៀត P រក្សាប្រមាណវិធីនៅដដែរ មានន័យថា

$$P(ab) = (ab)H = (aH)(bH) = P(a)P(b)$$

ដូចនេះ យើងបានដ្យាក្រាមដូចខាងក្រោម៖



$i : H \longrightarrow G$ គឺជាអនុគមន៍ប្រកាន់ $a \mapsto a$ ហើយរក្សាប្រមាណវិធី

$P : G \longrightarrow {}^{G}\!/_{H}$ គឺជាអនុគមន៍ពេញ $a \mapsto aH$ ហើយរក្សាប្រមាណវិធី

តាមដ្យាក្រាមខាងលើ យើងឃើញថាសំណុំ G អាចបែងចែកជាបំណែកៗ ដែលបំណែកមួយក្នុងនោះគឺជាក្រុមរង H ហើយបំណែកនីមួយៗគឺត្រូវគ្នាជាមួយនឹងធាតុនីមួយៗរបស់ក្រុមផលចែក ${}^{G}\!/_{H}$ ។
ដោយសារអនុគមន៍ i និង P សុទ្ធតែរក្សាប្រមាណវិធី
ដូចនេះ លក្ខណៈពីជគណិតមួយចំនួនរបស់ក្រុមរង H និងក្រុមផលចែក ${}^{G}\!/_{H}$ អាចនាំឱ្យបានលក្ខណៈពីជគណិតនៃក្រុម G ទាំងមូល។

ជាក់ស្តែង៖

- គេមាន G ជាក្រុមនិង $H \lhd G$។ ប្រសិនបើ $G/_H$ និង H គឺជាក្រុមដែលបង្កដោយជាតុរាប់អស់ នោះ G ក៏ជាក្រុមដែលបង្កដោយជាតុរាប់អស់ដែរ។
- គេមាន p ជាចំនួនបឋម។ ប្រសិនបើ $G/_H$ និង H ជា $p-$ក្រុម នោះ G ក៏ជា $p-$ក្រុម ។ (ក្រុម G ហៅថា $p-$ក្រុម លុះត្រាតែលំដាប់នៃគ្រប់ជាតុ $x \in G$ ជាស្វ័យគុណនៃ p)
- ប្រសិនបើគ្រប់ជាតុនៃ $G/_H$ មានលំដាប់រាប់អស់ និងគ្រប់ជាតុនៃ H មានលំដាប់រាប់អស់ នោះគ្រប់ជាតុនៃ G មានលំដាប់រាប់អស់។
- ឧបមាថា G ជាក្រុមត្រឡប់។ បើគ្រប់ជាតុនៃ $G/_H$ មានឫសការេ និងគ្រប់ជាតុនៃ H មានឫសការេ នោះគ្រប់ជាតុនៃ G ក៏មានឫសការេដែរ។

តែលក្ខណៈត្រឡប់នៃ H និង $G/_H$ មិននាំឱ្យ G ត្រឡប់ជាទូទៅទេ ព្រោះតាមឧទាហរណ៍ផ្ទុញខាងក្រោម ៖

ឧទាហរណ៍ 5.1. ពិនិត្យក្រុមចម្លាស់ $S_3 = \{\epsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ ។
ក្រុមនៃចម្លាស់គូ $A_3 = \{\epsilon, (123), (132)\}$ គឺជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ S_3 ។
ម្យ៉ាងទៀត តាមទ្រឹស្តីបទ Lagrange ៖

$$\left| S_3/_{A_3} \right| = \frac{|S_3|}{|A_3|} = \frac{6}{3} = 2$$

ដោយក្រុមដែលមានលំដាប់ 2 និង 3 ជាក្រុមត្រឡប់ ព្រោះជាក្រុម Cyclic ។
នាំឱ្យ A_3 និង $S_3/_{A_3}$ ជាក្រុមត្រឡប់ តែ S_3 មិនមែនជាក្រុមត្រឡប់ទេ។

ប៉ុន្តែយើងអាចថែមលក្ខណៈខ្លះឱ្យ H និង $G/_H$ ដើម្បីឱ្យ G អាចត្រឡប់បាន៖
បើ $H = Z(G) = \{a \in G | ax = xa, \forall x \in G\}$ ជាផ្ចិតនៃក្រុម ហើយ $G/_H = G/_{Z(G)}$ ជាក្រុម Cyclic នោះ G ជាក្រុមត្រឡប់ ។
ម្យ៉ាងទៀត ក្រុមផលចែកប្រើប្រាស់នៅក្នុងទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃ Homomorphism ខាងក្រោម៖
ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃ Homomorphism ៖ បើ G_1 និង G_2 ជាក្រុម ហើយ $f: G_1 \longrightarrow G_2$ រក្សាប្រមាណវិធី គេបាន $G_1/_{\mathrm{Ker} f} \cong \mathrm{Im} f$ ដែល

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker} f &:= \{x \in G_1 | f(x) = e_{G_2}\} \lhd G_1 \\ \mathrm{Im} f &:= \{f(x) | x \in G_1\} \leq G_2 \text{ ។} \end{aligned}$$

References

[1] **Charles C. Pinter**. *A Book of Abstract Algebra*, Second Edition. McGraw-Hill Publishing Company, Inc., New York, 1982.

[2] **Joseph A. Gallian**. *Contemporary Abstract Algebra*, Eight Edition. CENGAGE Learning, United State of America, 2017.

[3] **David S. Dummit** and **Richard M. Foote**. *Abstract Algebra*, Fourth Edition. John Wiley and Sons, Inc. 2004.